

CONCOURS D'ENTRÉE 1999

MATHÉMATIQUES : ÉPREUVE B

FILIÈRE PHYSIQUE ET CHIMIE

DURÉE : 2 heures 30.

N.B. : Ce sujet comporte 2 pages de texte.

Dans tout le problème, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.
On identifiera le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ avec la fonction polynômiale

$$\begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & P(t) \end{array}$$

I

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ muni de la base canonique $B = (1, X, \dots, X^n)$.

Soit φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = (1-X^2) P''(X) - 3X P'(X)$.

1. a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
b. Ecrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
2. a. Déterminer les valeurs propres de φ .
b. Montrer que φ est diagonalisable.
c. Montrer qu'il existe une base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ formée de vecteurs propres de coefficients dominants égaux à 1, tels que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, P_k soit de degré k .
d. Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3 .
e. Préciser la parité de P_n . Calculer le coefficient de X^{n-2} dans P_n .
3. On considère l'équation différentielle $(E_n) : (1-x^2) y'' - 3x y' + n(n+2) y = 0$.
On suppose dans cette question que n est impair.

Montrer qu'il existe une solution de (E_n) développable en série entière de la forme

$$\sum a_{2p} x^{2p} \text{ telle que pour tout } p \in \mathbb{N}, a_{2p} \neq 0.$$

Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

En déduire toutes les solutions de (E_n) sur l'intervalle $] -1, 1[$.

(L'étude du cas pair est analogue ; elle n'est pas demandée).

II

On note E l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Pour } f \text{ et } g \text{ dans } E \text{ on pose : } \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) g(t) \sqrt{1-t^2} dt.$$

1. a. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire dans E .

b. Calculer $\langle X^i, X^j \rangle$ pour i et j dans $\mathbb{N}$.

2. Pour $f \in E$ de classe C^2 sur $[-1, 1]$, on pose : $\varphi(f)(x) = (1-x^2) f''(x) - 3x f'(x)$.

a. Montrer que : si f et g sont de classe C^2 sur $[-1, 1]$ alors $\langle \varphi(f), g \rangle = \langle f, \varphi(g) \rangle$.

b. Montrer que les polynômes P_k définis dans la question I 2°c) on a :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \langle P_k, P_n \rangle = 0.$$

au plus

3. a. Montrer que $P_n - X P_{n-1}$ est de degré $\sqrt{n-1}$ et qu'il est orthogonal à tout polynôme de degré $n-3$ (pour $n \geq 3$).

En déduire que $P_n - X P_{n-1}$ est combinaison linéaire de P_{n-1} et de P_{n-2} .

b. En utilisant le I.2.e., montrer $4P_n - 4X P_{n-1} + P_{n-2} = 0$ pour $n \geq 2$.

c. Calculer $P_n(1)$.

4. a. Montrer que $\langle P_n, P_n \rangle = \langle P_n, X^n \rangle = \int_{-1}^1 t^n P_n(t) \sqrt{1-t^2} dt$.

Calculer $\langle P_n, P_n \rangle$ pour $0 \leq n \leq 2$.

b. Pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, montrer : $\langle P_k, X^{k+2} \rangle = \frac{k+1}{4} \langle P_k, P_k \rangle$.

c. En déduire une relation de récurrence entre $\langle P_n, P_n \rangle$, $\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle$ et $\langle P_{n-2}, P_{n-2} \rangle$.

d. Montrer que $\langle P_n, P_n \rangle = \frac{\pi}{2^{2n+1}}$.
